

SESION 14

LA ELIPSE

I. CONTENIDOS:

1. Elipse con centro en el origen.
2. Elipse con el eje mayor vertical y horizontal.
3. Elipse con centro fuera del origen.

II. OBJETIVOS:

Al término de la Clase, el alumno:

- Comprenderá el concepto de excentricidad, lado recto, eje mayor y eje menor.
- Aprenderá la forma paramétrica y general de la elipse.

III. PROBLEMATIZACIÓN:

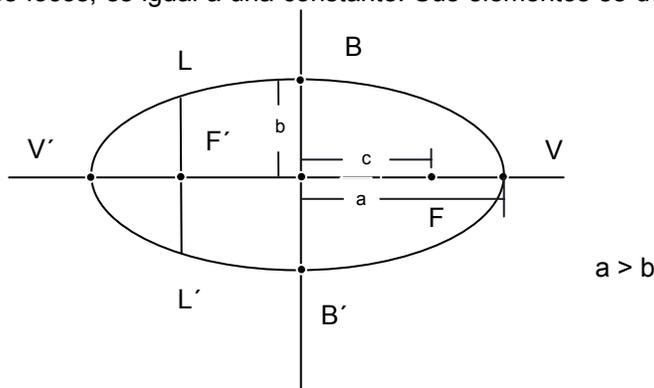
Comenta las preguntas con tu Asesor y selecciona las ideas más significativas.

- ¿Cómo es una elipse?
- Las trayectorias de los planetas, ¿son circulares o elípticas?
- ¿Se puede saber en donde están sus focos?

IV. TEXTO INFORMATIVO-FORMATIVO:

1.1. Elipse con centro en el origen

La elipse es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es igual a una constante. Sus elementos se describen en la siguiente figura.



$V(a,0)$ $V'(-a,0)$	Vértices	Distancia entre los vértices = $2a$
$F(c,0)$ $F'(-c,0)$	Focos	Distancia entre los focos = $2c$
$\overline{V'V}$ $\overline{BB'}$	Eje mayor Eje menor	Longitud del eje menor = $2b$
FF'	Distancia Focal	
$\overline{LL'}$	Lado Recto	

Un concepto importante es la excentricidad definida como:

$$e = \frac{c}{a}$$

También será de gran utilidad el teorema de Pitágoras:

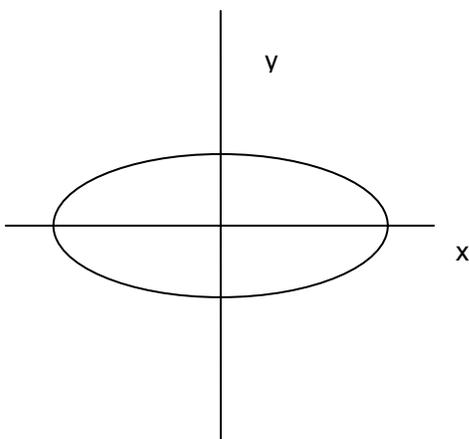
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Para determinar el lado recto se utiliza la expresión.

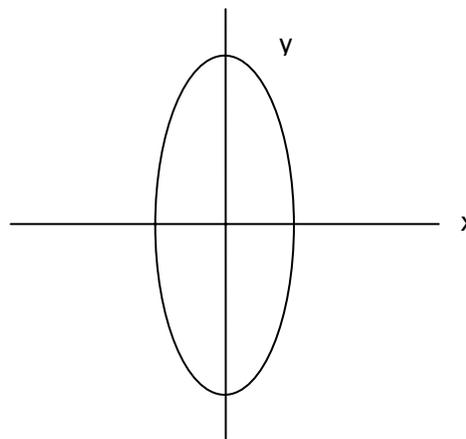
$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

2.1. Elipse con el eje mayor vertical y horizontal

En las siguientes figuras se muestran las ecuaciones para una elipse con el eje mayor y otra con el eje menor.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Ambas con centro en el origen.

Ejemplo:

Determinar la ecuación de la elipse con centro en el origen, que tiene un vértice en (6,0) y su distancia focal es de 4.

La elipse es con el eje mayor sobre x ya que V(6,0) es de la forma V(a, 0) por lo que a = 6.

La distancia focal es 2C por lo que:

$$2c = 4$$

$$c = \frac{4}{2}$$

$$c = 2$$

La ecuación es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Por lo que solo falta conocer el valor de b.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{(6)^2 - (2)^2}$$

$$b = \sqrt{32}$$

$$b = 4\sqrt{2}$$

Entonces la ecuación queda:

$$\frac{x^2}{(6)^2} + \frac{y^2}{(4\sqrt{2})^2} = 1$$

$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$

Ejemplo 2:

La ecuación de una elipse es $25x^2 + 36y^2 - 900 = 0$ Determinar las coordenadas de los vértices, focos, longitud de los ejes mayor y menor, lado recto y excentricidad.

Primero, hay que transformar la ecuación a la forma ya conocida, en este caso se dividen todos los términos entre el término independiente (siempre será así).

$$\frac{25x^2}{900} + \frac{36y^2}{900} - \frac{900}{900} = 0$$

Simplificando:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$$

El numero mayor esta sobre X² por lo que es una elipse con el eje principal horizontal. Entonces:

$a^2 = 36$	$b^2 = 25$
$a = 6$	$b = 5$

Se obtiene C

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{(6)^2 - (5)^2}$$

$$c = \sqrt{36 - 25}$$

$$c = \sqrt{11}$$

Como los vértices son $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$

$$V(6,0), V'(-6,0)$$

y $F(c,0)$ y $F'(-c,0)$

$$F(\sqrt{11}, 0) \quad F'(-\sqrt{11}, 0)$$

Eje mayor = $2a$ Eje menor = $2b$

Eje mayor = 12 Eje menor = 10

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

$$LR = \frac{2(5)^2}{6}$$

$$LR = \frac{25}{3}$$

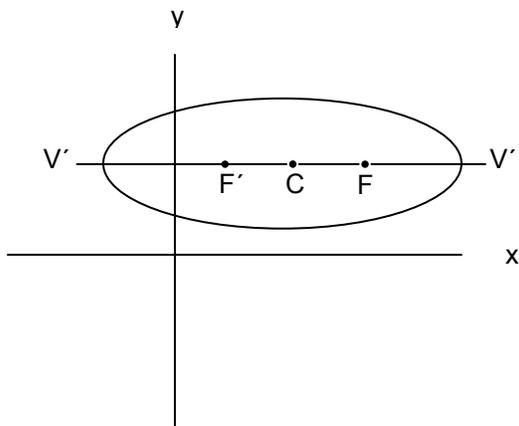
Y la excentricidad

$$E = \frac{c}{a}$$

$$e = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

3.1. Elipse con centro fuera del origen

Si el centro de una elipse está en un punto cualquiera del plano, entonces se convierte en $C(h,k)$ y la manera de determinar los vértices y focos se muestran en las siguientes figuras, así como sus ecuaciones.

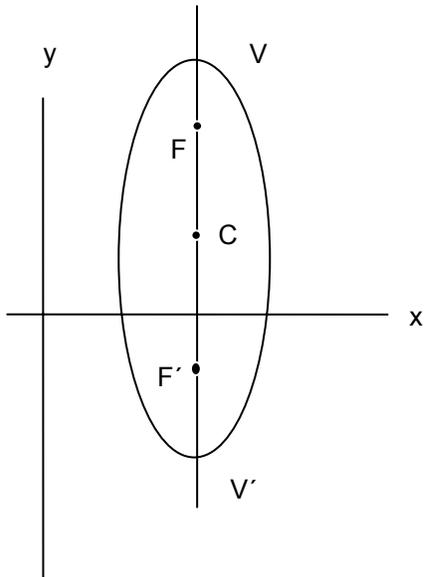


$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$V(h \pm a, k)$$

$$F(h \pm c, k)$$

$$C(h, k)$$



$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$V (h, k \pm a)$
 $F (h, k \pm c)$

Ejemplo:

La ecuación de una elipse es $\frac{(x-6)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$ Determina las coordenadas del centro, vértices y focos.

La elipse es horizontal y su centro es $C(h,k)$ entonces
 $C(6,-4)$

$$a^2 = 36 \quad b^2 = 16 \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$a = 6 \quad b = 4 \quad c = \sqrt{36 - 16}$$

$$c = \sqrt{20}$$

$$c = 2\sqrt{5}$$

Por lo tanto:

$$V (h + a, k) \quad V' (h - a, k)$$

$$V (6 + 6, -4) \quad V' (6 - 6, -4)$$

$V(12, -4)$	$V' (0, -4)$
-------------	--------------

$$F (h + c, k) \quad F' (h - c, k)$$

$F (6 + 2\sqrt{5}, -4)$	$F' (6 - 2\sqrt{5}, -4)$
-------------------------	--------------------------

V. ESTRATEGIAS CENTRADAS EN EL APRENDIZAJE:

A. Resuelve los siguientes ejercicios.

1. La ecuación de una elipse es $16x^2 + 25y^2 = 400$. Determina las coordenadas de los vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, la excentricidad y la longitud de su lado recto.

2. Determina la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos $(2,0)$, $(-2,0)$ y su excentricidad es igual a $\frac{2}{3}$.

3. Los focos de una elipse son los puntos $(3,0)$, $(-3,0)$, y la longitud de uno cualquiera de sus lados rectos es igual a 9. Determina la ecuación de la elipse.

B. Resuelve el Problema Reto.

Encuentra la ecuación de la elipse que pasa por el punto $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, 3\right)$, tiene su centro en el origen, su eje menor coincide con el eje x y la longitud de su eje mayor es el doble de su eje menor.